

Voorbeeldoplossingen zelfstudie opgaven

1. ★★★ Bepaal de meetkundige plaats van de punten waarvoor de som van de kwadraten van de afstanden tot de zijden van een gelijkzijdige driehoek constant is.

Kies het orthonormale assenstelsel zo dat de driehoek $\triangle ABC$ is, met $A(1,0)$, $B(-1,0)$ en $C(0,\sqrt{3})$. De vergelijkingen van de (dragers van de) zijden zijn dan $AB \leftrightarrow y=0$, $AC \leftrightarrow y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ en $BC \leftrightarrow y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$.

Noem $P(\alpha, \beta)$ een punt van de meetkundige plaats $\mathcal{K}$, en noem de gegeven constante k . Dan geldt:

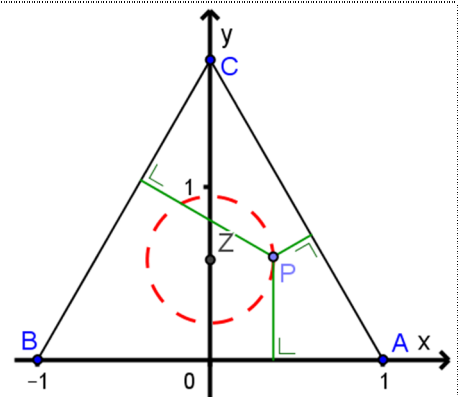
$$P \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \beta^2 + \left(\frac{|\sqrt{3}\alpha + \beta - \sqrt{3}|}{\sqrt{3+1}} \right)^2 + \left(\frac{|\sqrt{3}\alpha - \beta + \sqrt{3}|}{\sqrt{3+1}} \right)^2 = k$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 + \frac{3\alpha^2 + \beta^2 + 3 + 2\sqrt{3}\alpha\beta - 6\alpha - 2\sqrt{3}\beta}{4} + \frac{3\alpha^2 + \beta^2 + 3 - 2\sqrt{3}\alpha\beta + 6\alpha - 2\sqrt{3}\beta}{4} = k$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\alpha^2 + \frac{3}{2}\beta^2 - \sqrt{3}\beta = k - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{3}\beta = \frac{2}{3}k - 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + \left(\beta - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{2k-2}{3}$$

De vergelijking van de meetkundige plaats is dus $\mathcal{K} \leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{2k-2}{3}$, dit is een cirkel met als middelpunt het zwaartepunt van de driehoek.

(merk op dat dit niet voor alle gekozen constanten geldt, omdat moet gelden dat $k \geq 1$).



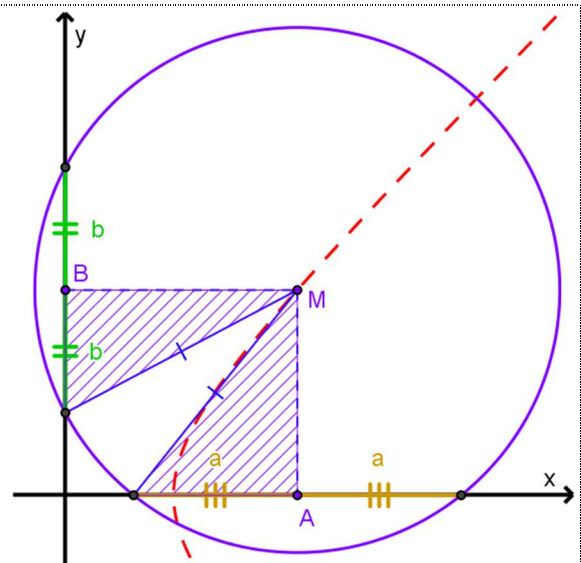
2. ★★★ Gegeven zijn twee rechten x en y , met $x \perp y$. Bepaal de meetkundige plaats van het middelpunt van de cirkels die van x een lijnstuk van lengte $2a$ en van y een lijnstuk van lengte $2b$ afsnijden.

Het assenstelsel is eigenlijk gegeven. Noem nu dit middelpunt $M(\alpha, \beta)$. Uit de figuur volgt dat voor een cirkel die voldoet aan de gegevens moet gelden dat:

$$\alpha^2 + b^2 = \beta^2 + a^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 = a^2 - b^2.$$

(2x Pythagoras toegepast in de gearceerde driehoeken op de straal van zo'n cirkel.)

De meetkundige plaats van de middelpunten is dus de gelijkzijdige hyperbool $\mathcal{H} \leftrightarrow x^2 - y^2 = a^2 - b^2$.



3. ★★ Ten opzichte van een assenstelsel zijn gegeven $A(a,0)$ en $B(-a,0)$, met $a \neq 0$. Op de y -as liggen de punten C en D zodat $\overrightarrow{OC} = 3 \cdot \overrightarrow{OD}$. Bepaal de meetkundige plaats van het snijpunt van AC en BD .

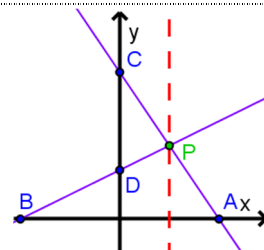
Noem $D(0,d)$ zodat $C(0,3d)$.

Dan is $AC \leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{3d} = 1$ en $BD \leftrightarrow \frac{x}{-a} + \frac{y}{d} = 1$. We elimineren parameter d :

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{3d} = 1 \\ \frac{x}{-a} + \frac{y}{d} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3dx + ay = 3ad \\ -dx + ay = ad \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \frac{ay}{3a-3x} \\ d = \frac{ay}{a+x} \end{cases} \Rightarrow \frac{ay}{3a-3x} = \frac{ay}{a+x}$$

$$\Rightarrow ay(4x-2a) = 0 \Leftrightarrow \cancel{a=0} \vee y=0 \vee x = \frac{a}{2}$$

De oplossing $y=0$ is de *singuliere oplossing* die we krijgen wanneer $d=0$ (en de rechten AC en BD dus samenvallen). De verticale rechte $r \leftrightarrow x = \frac{a}{2}$ is dus de gezochte meetkundige plaats.



4. ★★★ De normaal in een veranderlijk punt van een hyperbool $\mathcal{H}$ snijdt de assen van deze hyperbool in de punten A en B . Bepaal de meetkundige plaats van het midden van $[AB]$.

Noem $\mathcal{H} \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, en neem als het punt $P(a \sec \alpha, b \tan \alpha)$.

Dan is de raaklijn in P de rechte $t \leftrightarrow \frac{x \sec \alpha}{a} - \frac{y \tan \alpha}{b} = 1$ en de

normaal is $n \leftrightarrow \frac{\tan \alpha}{b}(x - a \sec \alpha) + \frac{\sec \alpha}{a}(y - b \tan \alpha) = 0$.

Voor A en B geldt (snijpunten met de x -as en de y -as, dus stel $y=0$ en $x=0$):

$$\frac{\tan \alpha}{b}(x - a \sec \alpha) + \frac{\sec \alpha}{a}(0 - b \tan \alpha) = 0 \Rightarrow x = \frac{b^2}{a} \sec \alpha + a \sec \alpha = \frac{c^2}{a} \sec \alpha, \text{ dus } A\left(\frac{c^2}{a} \sec \alpha, 0\right).$$

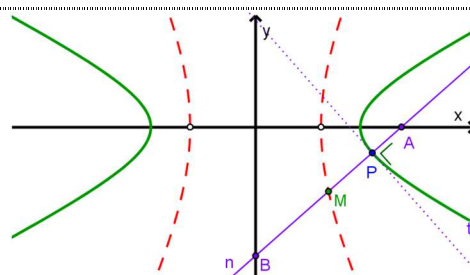
$$B: \frac{\tan \alpha}{b}(0 - a \sec \alpha) + \frac{\sec \alpha}{a}(y - b \tan \alpha) = 0 \Rightarrow y = \frac{a^2}{b} \tan \alpha + b \tan \alpha = \frac{c^2}{b} \tan \alpha, \text{ dus } B\left(0, \frac{c^2}{b} \tan \alpha\right).$$

Het midden M van $[AB]$ ligt dus op de krommen $v \leftrightarrow x = \frac{c^2}{2a} \sec \alpha$ en $h \leftrightarrow y = \frac{c^2}{2b} \tan \alpha$.

We elimineren hieruit de parameter α met behulp van het goniometrische verband $\sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha = 1$:

$$\begin{cases} x = \frac{c^2}{2a} \sec \alpha \\ y = \frac{c^2}{2b} \tan \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sec \alpha = \frac{2ax}{c^2} \\ \tan \alpha = \frac{2by}{c^2} \end{cases} \xRightarrow{\sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha = 1} \left(\frac{2ax}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{2by}{c^2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{4a^2x^2}{c^4} - \frac{4b^2y^2}{c^4} = 1.$$

De meetkundige plaats zal dus een hyperbool zijn met hetzelfde symmetriemiddelpunt, maar geperforeerd in zijn toppen (omdat punt A in dat geval niet gedefinieerd is).



5. ★★ De driehoek $\triangle ABC$ is rechthoekig in het vaste hoekpunt C . De zijde AB is veranderlijk maar heeft een vaste richting. Buiten de driehoek construeert men de vierkanten $CADE$ en $CBFG$. Bepaal de meetkundige plaats van het snijpunt van AF en BD .

Noem $C(0,0)$, $A(a,0)$ en $B(0,b)$, met $m_{AB} = -b/a = m$ de gegeven

richting. Hierbij stellen we uiteraard $a \neq 0$ en $b \neq 0$ zodat ook $m \in \mathbb{R}_0$.

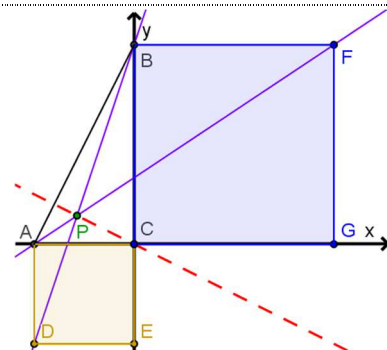
Dan is $AF \leftrightarrow (b-0)(x-a) = (b-a)(y-0) \Leftrightarrow bx + (a-b)y = ab$,

en $BD \leftrightarrow (b-a)(x-a) = (0-a)(y-a) \Leftrightarrow (b-a)x + ay = ab$.

We elimineren uit deze voortbrengende krommen a en b door ze eerst van elkaar af te trekken (of gelijk te stellen): $ax - by = 0$.

Omdat $-b/a = m$, is dit equivalent met $y = -\frac{1}{m} \cdot x$.

De gezochte meetkundige plaats is dus de rechte door hoekpunt C die loodrecht staat op AB .



6. ★★ Een gelijkbenige driehoek $\triangle ABC$ is ingeschreven in een vaste cirkel, met $\hat{A} = 30^\circ$ en $\hat{B} = \hat{C} = 75^\circ$. De hoekpunten A, B en C zijn veranderlijk. Bepaal de meetkundige plaats van het zwaartepunt van de driehoek.

Noem M het middelpunt van de omgeschreven cirkel met straal r .

Dit punt ligt sowieso op de zwaartelij uit A , want die zwaartelij is ook een middelloodlijn (omdat $\triangle ABC$ gelijkbenig is).

De driehoek $\triangle BMC$ is gelijkzijdig omdat $\widehat{BMC} = 60^\circ$ (verband middelpuntshoek en omtrekshoek).

Noemen we D het midden van $[BC]$ dan is dus $|MD| = \frac{\sqrt{3}}{2} r$.

We weten verder dat het zwaartepunt Z op afstand $2/3$ van het

hoekpunt ligt op het zwaartelijnstuk. Dus is $|AZ| = \frac{2}{3} \left(r + \frac{\sqrt{3}}{2} r \right)$, en

dan is $|MZ| = |AZ| - r = \frac{2}{3} \left(r + \frac{\sqrt{3}}{2} r \right) - r = \frac{\sqrt{3}-1}{3} r$.

Het enige wat we kunnen doen met deze driehoek in de cirkel, omdat de hoeken gelijk moeten blijven, is hem draaien om het middelpunt M . Maar dan draait het zwaartepunt gewoon mee. De meetkundige plaats

is dus de kleine cirkel met straal $\frac{\sqrt{3}-1}{3} r$ en hetzelfde middelpunt als dat van de omgeschreven cirkel.

(Opm.: deze vraag analytisch oplossen is zéér moeilijk, en niet aan te raden.)

