

Zelfstudieproject: meetkundige plaatsen

Definitie

Een meetkundige plaats is een verzameling punten die aan een bepaalde eigenschap voldoet. De analytische meetkunde kan ons helpen om te bepalen hoe zo'n meetkundige plaats eruitziet.

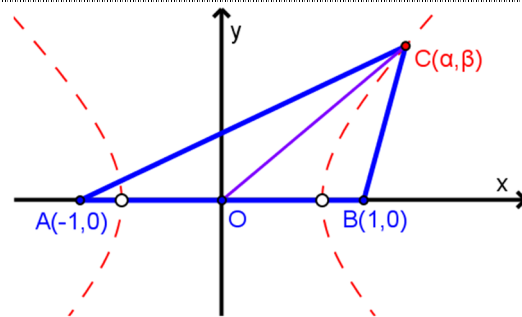
Methode 1: analytische vertolking van de opgave

Bij deze methode volg je de volgende stappen:

- Kies bij de opgave een gepast assenstelsel.
- Druk de voorwaarde uit waaronder een willekeurig punt $P(\alpha, \beta)$, met $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, deel zal uitmaken van de meetkundige plaats $\mathcal{K}$.
- Druk deze voorwaarde uit als een voorschrift $f(\alpha, \beta) = 0$ waar α en β moeten aan voldoen.
- Vervang dan in dit voorschrift α door x en β door y , dan vind je de vergelijking van de meetkundige plaats $\mathcal{K}$.
- Interpreteer deze vergelijking om te zien welke soort kromme $\mathcal{K}$ is.

Voorbeeld 1: Voor een driehoek ABC zijn de punten A en B vast en is C een veranderlijk punt. Bepaal de meetkundige plaats van het punt C zodat het product van de zijden $|AC|$ en $|BC|$ gelijk is aan het kwadraat van het zwaartelijnstuk uit C .

Kies het orthonormale assenstelsel zo dat $A(-1,0)$ en $B(1,0)$ en stel $C(\alpha, \beta)$ (zie figuur).



Dan is $|AC| = \sqrt{(\alpha+1)^2 + \beta^2}$ en $|BC| = \sqrt{(\alpha-1)^2 + \beta^2}$, en de lengte van het zwaartelijnstuk uit C is $|z_c| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Noemen we de meetkundige plaats $\mathcal{K}$, dan geldt:

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{K} &\Leftrightarrow |AC| \cdot |BC| = |z_c|^2 \Leftrightarrow \sqrt{(\alpha+1)^2 + \beta^2} \cdot \sqrt{(\alpha-1)^2 + \beta^2} = \alpha^2 + \beta^2 \\ &\Leftrightarrow ((\alpha+1)^2 + \beta^2)((\alpha-1)^2 + \beta^2) = (\alpha^2 + \beta^2)^2 \Leftrightarrow (\alpha^2 + 2\alpha + 1 + \beta^2)(\alpha^2 - 2\alpha + 1 + \beta^2) = \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 \\ &\Leftrightarrow \alpha^4 + \beta^4 + 1 + 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2 = \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 2\beta^2 = 1. \end{aligned}$$

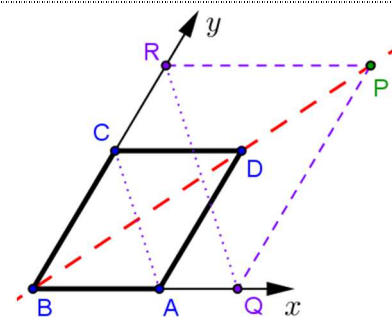
De vergelijking is dus $\mathcal{K} \Leftrightarrow 2x^2 - 2y^2 = 1$, of nog $\mathcal{K} \Leftrightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{2}/2)^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2}/2)^2} = 1$.

Dit is een gelijkzijdige hyperbool met A en B als brandpunten (want $a = b = \sqrt{2}/2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$).

De toppen van deze hyperbool noemen we *parasitaire delen* van de meetkundige plaats, omdat ze niet echt voldoen aan de opgave (vermits er in dat geval geen sprake meer is van een driehoek $\triangle ABC$).

Merk op dat je het assenstelsel volledig vrij mag kiezen, dus zorg ervoor dat je het zo eenvoudig mogelijk neemt. Als het niet nodig is om georthonormeerd te werken (dus als er in de opgave geen sprake is van afstanden, loodrechte stand of hoeken) mag je ook in een willekeurig affien assenstelsel werken.

Voorbeeld 2: Gegeven is een parallellogram $ABCD$ en een veranderlijk punt P . De evenwijdige met BC door P snijdt AB in Q en de evenwijdige met AB door P snijdt BC in R . Bepaal de meetkundige plaats van de punten P waarvoor geldt dat $QR \parallel AC$. Kies het (affiene) assenstelsel zo dat $\overrightarrow{BA} = \vec{x}$ en $\overrightarrow{BC} = \vec{y}$, dan is $A(1,0)$, $B(0,0)$, $C(0,1)$ en $D(1,1)$.



Neem voor punt $P(\alpha, \beta)$, dan is $Q(\alpha, 0)$ en $R(0, \beta)$. Dan geldt:

$$P(\alpha, \beta) \in \mathcal{K} \Leftrightarrow QR \parallel AC \Leftrightarrow m_{QR} = m_{AC} \Leftrightarrow \frac{\beta - 0}{0 - \alpha} = \frac{1 - 0}{0 - 1} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha = \beta.$$

De meetkundige plaats is de rechte met vergelijking $y = x$, dit is de rechte BD .

Het punt B is hier een parasitair punt van de oplossing omdat in dat geval de punten Q en R samen vallen en er dus geen sprake kan zijn van de rechte QR .

Enkele opgaven om zelf eens te proberen:

- ★★★ Bepaal de meetkundige plaats van de punten waarvoor de som van de kwadraten van de afstanden tot de zijden van een gelijkzijdige driehoek constant is.
- ★★ Gegeven zijn twee rechten x en y , met $x \perp y$. Bepaal de meetkundige plaats van het middelpunt van de cirkels die van x een lijnstuk van lengte $2a$ en van y een lijnstuk van lengte $2b$ afsnijden.

Method 2: voortbrengende krommen

Een meetkundige plaats wordt vaak gedefinieerd als het snijpunt van twee veranderlijke rechten of krommen. We noemen deze krommen in dat geval de *voortbrengende krommen* van de meetkundige plaats.

Bij deze methode volg je de volgende stappen:

- Kies bij de opgave een gepast assenstelsel en voer een of meerdere parameters in.
- Stel de vergelijking op van de voortbrengende krommen.
- Elimineer de parameter(s) uit de vergelijkingen van de voortbrengende krommen.
- Interpreteer de zo verkregen vergelijking van de meetkundige plaats.

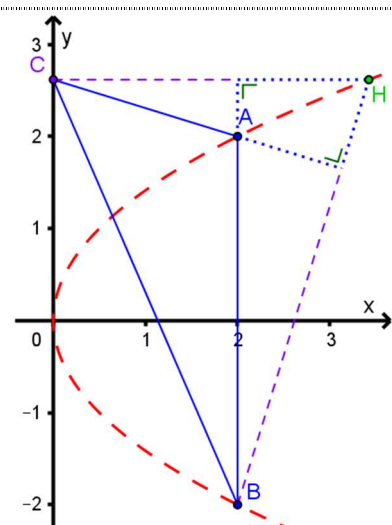
Voorbeeld 1: Ten opzichte van een georthonormeed assenstelsel zijn gegeven de punten $A(2,2)$ en $B(2,-2)$. Op de y -as neem je een veranderlijk punt C . Bepaal de meetkundige plaats van het hoogtepunt van driehoek $\triangle ABC$. Noem $C(0,c)$. Dan is de hoogtelijn uit C de rechte $h_C \leftrightarrow y = c$.

De hoogtelijn uit B is $h_B \leftrightarrow (2-0)(x-2) + (2-c)(y+2) = 0$, of na vereenvoudiging: $h_B \leftrightarrow 2x + (2-c)y = 2c$.

Elimineren we c uit de twee voortbrengende krommen, dan krijgen we:

$$\begin{cases} 2x + (2-c)y = 2c \\ y = c \end{cases} \xRightarrow{\text{subs}} \mathcal{K} \Leftrightarrow 2x + (2-y)y = 2y \Leftrightarrow y^2 = 2x$$

De gezochte meetkundige plaats is dus de parabool met top in de oorsprong die door de punten A en B gaat.



Het elimineren van de parameter(s) kan je op verschillende manieren doen: met behulp van substitutie (zoals bij dit eerste voorbeeld), met behulp van een determinant (de eliminant), met behulp van gelijkstelling, met behulp van goniometrische formules, enz.

Voorbeeld 2: Neem een veranderlijk punt D op een ellips $\mathcal{E}$ met A een top op de hoofdas. Noem D' en D'' de spiegelbeelden van D om de assen van de ellips. Bepaal de meetkundige plaats van het snijpunt van AD en $D'D''$.

Noem $\mathcal{E} \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $D(a \cos \alpha, b \sin \alpha)$, $A(a, 0)$.

De spiegelbeelden zijn $D'(-a \cos \alpha, b \sin \alpha)$ en $D''(a \cos \alpha, -b \sin \alpha)$.

Dan zijn de voortbrengende krommen:

$AD \leftrightarrow b \sin \alpha \cdot (x - a) - (a \cos \alpha - a) \cdot y = 0$ en $D'D'' \leftrightarrow b \sin \alpha \cdot x + a \cos \alpha \cdot y = 0$.

We elimineren nu de parameter α uit de twee voortbrengende krommen hun vergelijkingen:

$$\begin{cases} b \sin \alpha \cdot (x - a) - (a \cos \alpha - a) \cdot y = 0 \\ b \sin \alpha \cdot x + a \cos \alpha \cdot y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{a \cos \alpha \cdot y}{x} \cdot (x - a) - (a \cos \alpha - a) \cdot y = 0 \\ \sin \alpha = -\frac{a \cos \alpha \cdot y}{bx} \end{cases} \stackrel{*}{\Rightarrow} \begin{cases} \cos \alpha = \frac{x}{2x - a} \\ \sin \alpha = -\frac{ay}{b(2x - a)} \end{cases}$$

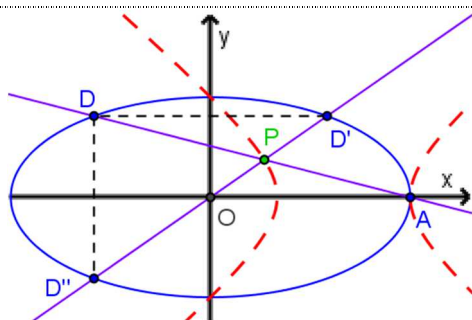
$$*: -\cancel{a} \cos \alpha \cdot \cancel{y} + a \cancel{\cos \alpha} \cdot \frac{\cancel{y}}{x} - \cancel{a} \cos \alpha \cdot \cancel{y} + \cancel{a} \cdot \cancel{y} = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2 - a/x} = \frac{x}{2x - a}$$

Uit de goniometrie weten we dat geldt: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$. We gebruiken deze formule om α te elimineren:

$$\left(\frac{x}{2x - a}\right)^2 + \left(-\frac{ay}{b(2x - a)}\right)^2 = 1 \Rightarrow b^2 x^2 + a^2 y^2 = b^2 (2x - a)^2 \Leftrightarrow b^2 x^2 + a^2 y^2 = 4b^2 x^2 - 4ab^2 x + a^2 b^2$$

$$\Leftrightarrow 3b^2 x^2 - 4ab^2 x - a^2 y^2 + a^2 b^2 = 0 \Leftrightarrow 3b^2 \left(x - \frac{2}{3}a\right)^2 - \frac{4}{3}a^2 b^2 - a^2 y^2 + a^2 b^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{(3x - 2a)^2}{a^2} - \frac{3y^2}{b^2} = 1$$

Dit is een hyperbool waarvan het middelpunt op $2/3$ van de halve grote as van de ellips ligt en die door de toppen op de nevenas van de ellips gaat. De toppen van de hyperbool zijn parasitaire punten (in dat geval vallen de rechten AD en $D'D''$ samen). Bij de stap (*) in de oplossing hierboven schrappen we $y = 0$ als oplossing. We noemen dit het singuliere deel van de oplossing (als de voortbrengende krommen samenvallen), en rekenen het niet mee met de eigenlijke meetkundige plaats.



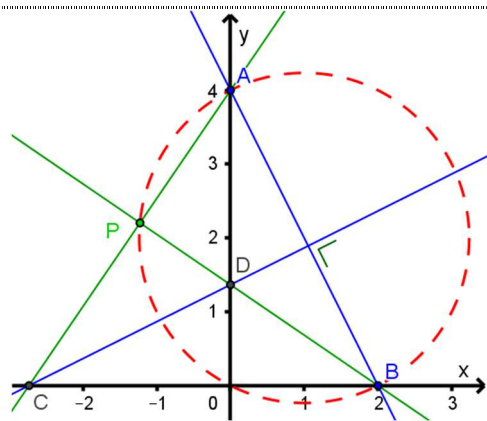
In sommige gevallen kan het rekenwerk vereenvoudigd worden door het invoeren van een extra parameter. Een gegeven uit de opgave kan dan gebruikt worden om het verband tussen de parameters in een formule weer te geven. We noemen dit dan de bindingsvoorwaarde. Deze kan gebruikt worden om de parameters uit het stelsel vergelijkingen van de voortbrengende krommen te elimineren.

Voorbeeld 3: Ten opzichte van een georthonormeed assenstelsel zijn gegeven de punten $A(0, 4)$ en $B(2, 0)$. Een veranderlijke loodlijn op AB snijdt de x -as in C en de y -as in D . Bepaal de meetkundige plaats van het snijpunt van AC en BD .

Noem $C(c, 0)$ en $D(0, d)$ dan moet gelden:

$$CD \perp AB \Leftrightarrow m_{CD} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-d}{c} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow c = -2d$$

(dit is dus de bindingsvoorwaarde).



De voortbrengende krommen zijn $AC \leftrightarrow \frac{x}{c} + \frac{y}{4} = 1$ en $BD \leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{d} = 1$.

We elimineren de parameters c en d uit het stelsel gevormd door de twee voortbrengende krommen met behulp van hun bindingsvoorwaarde:

$$\begin{cases} \frac{x}{c} + \frac{y}{4} = 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{d} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{4x}{4-y} \\ d = \frac{2y}{2-x} \end{cases} \xrightarrow{c=-2d} \frac{4x}{4-y} = -2 \cdot \frac{2y}{2-x} \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0.$$

De gezochte meetkundige plaats is dus de cirkel met $[AB]$ als diameter (en dus met middelpunt $(1, 2)$).

Enkele opgaven om zelf eens te proberen:

- ★★ In een assenstelsel zijn de vaste punten $A(a, 0)$ en $B(-a, 0)$ gegeven, met $a \neq 0$. Op de y -as liggen de punten C en D zodat $\overrightarrow{OC} = 3 \cdot \overrightarrow{OD}$. Bepaal de meetkundige plaats van het snijpunt van AC en BD .
- ★★★ De normaal in een veranderlijk punt van een hyperbool $\mathcal{H}$ snijdt de assen van deze hyperbool in de punten A en B . Bepaal de meetkundige plaats van het midden M van $[AB]$.
(Tip: als voortbrengende krommen kan je de verticale $x = x_M$ en horizontale $y = y_M$ gebruiken)
- ★★ De driehoek $\triangle ABC$ is rechthoekig in het vaste hoekpunt C . De zijde AB is veranderlijk maar heeft een vaste richting. Buiten de driehoek construeert men de vierkanten $CAD E$ en $CBFG$. Bepaal de meetkundige plaats van het snijpunt van AF en BD .

Methode 3: gebruik makend van eigenschappen uit de vlakke meetkunde (niet-analytisch)

Het gebruik van analytische meetkunde leidt vaak heel snel tot exorbitant rekenwerk. In veel gevallen kan dit vermeden worden door het gebruik van eigenschappen die we vroeger zagen uit de vlakke meetkunde.

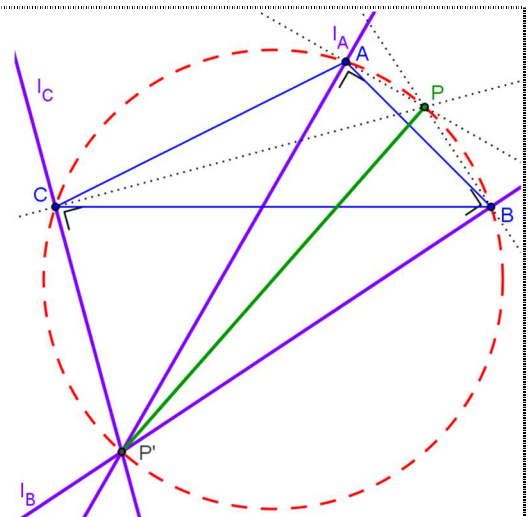
Voorbeeld: Gegeven is een driehoek ABC en een veranderlijk punt P . Men trekt in A de loodlijn op PA , in B de loodlijn op PB en in C de loodlijn op PC . Bepaal de meetkundige plaats van P zodat deze drie loodlijnen concurrent zijn.

Noem P' het snijpunt van de loodlijn in A op PA en de loodlijn in B op PB .

Dan liggen de punten A en B op de cirkel met $[PP']$ als diameter (omdat $\widehat{PAP'} = \widehat{PBP'} = 90^\circ$).

De loodlijn in C op PC zal deze cirkel ook snijden in P' als en slechts als $\widehat{PCP'} = 90^\circ$, maar dat zou willen zeggen dat C ook op de cirkel ligt met $[PP']$ als diameter. Dan ligt P dus op de omgeschreven cirkel van A, B en C .

De gezochte meetkundige plaats is dus de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$.



Een opgave om zelf eens te proberen:

- ★★ Een gelijkbenige driehoek $\triangle ABC$ is ingeschreven in een vaste cirkel, met $\hat{A} = 30^\circ$ en $\hat{B} = \hat{C} = 75^\circ$. De hoekpunten A, B en C zijn veranderlijk. Bepaal de meetkundige plaats van het zwaartepunt van $\triangle ABC$.